данном изложении матрица $\mathbf{M}_W$ с рангом 2 будет составлена из матрицы $\mathbf{M}_{\Gamma,L}$, с выбором индексов, соответствующих "белым" хордам; а матрица $\mathbf{M}_B$ с рангом 0 – "чёрным".

Заметим, что "чёрные" дуги на поверхности (если таковые существуют) не имеют общих точек, а значит и на диаграмме $\mathbf{D}_{\Gamma,L}$ "чёрные" хорды не будут зацеплены. И, следовательно, матрица $\mathbf{M}_B$ действительно будет иметь ранг 0.

Матрица $\mathbf{M}_W$ – это симметричная матрица над $\mathbb{Z}_2$ с нулями на главной диагонали и рангом равным 2. Легко показать, что множество индексов этой матрицы может быть разбито на три множества, два из которых обязательно не пустые. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Filotti I. S., Miller G. L., Reif J. *On determining the genus of a graph in 0(v0(g)) steps* // Proc. XI Annual Symp. on Theory of Computing. – N.Y.: ACM Press, 1979. – P. 27–37.

2. Lins S., Oliveira-Lima E., Silva V. *A homological solution for the Gauss code problem in arbitrary surface* // J. Comb. Theory. Ser. B. – 2007. – V. 98. – No 3. – P. 506–515.

3. Мантуров В. О. *Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 424. – № 3. – С. 308–310.

С. В. Томашевский

Российский университет дружбы народов,

vagabund@list.ru

ОБОБЩЕННЫЕ ФРЕЙМЫ И СИСТЕМЫ РИССА

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой (Ω – множество, Σ – σ-алгебра его подмножеств, μ – принимающая значения из

$[0,\ \infty]$ мера на Σ), H – гильбертово пространство (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 1 ([4]). *Пусть* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– система замкнутых вложенных* ($H_n \subset H_{n+1}$) *расширяющихся подпространств в* H*, объединение которых всюду плотно в* H*. Пусть* $\{e^{\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ *– система, такая что любой ее элемент* e^{ω} *является последовательностью* $\{e^{\omega}_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *элементов* H*,* $e^{\omega}_n \in H_n$ *и* e^{ω}_n *– ортогональная проекция* e^{ω}_{n+1} *на* H_n*. Тогда* $\{e^{\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ *– обобщенная система в* H*.*

Определение 2. *Обобщенную систему функций* $\{\varphi^{\omega}\}_{\omega\in\Omega} \subset$ *называют обобщенным фреймом, если существуют константы* A *и* B*,* $0 < A \leqslant B < \infty$*, такие что для любого* $y \in H_n$ *все функции* (y, φ^{ω}_n) *измеримы и для любого* $y \in H_n$ *выполнено неравенство:*

$$A\|y\|^2 \leqslant \int_{\Omega} |(y, \varphi^{\omega}_n)|^2 d\mu(\omega) \leqslant B\|y\|^2.$$

До 2004 г. фреймы рассматривались лишь в дискретном виде, и для многих целей точности разложения по ним было недостаточно. Более сложными являются интегральные фреймы, предложенные К. Блаттером [3]. Такой непрерывный аналог быстро нашел физическое применение и начал исследоваться теоретически. В работе [5] подробно изложены свойства интегральных фреймов, схожие со свойствами обычных фреймов. Дано определение интегральных систем Рисса. Но не все системы, обладающие свойствами ортоподобных систем, раскладываются по интегральным фреймам.

Т. П. Лукашенко ввел новый класс систем [4], названных им обобщенными ортоподобными системами. В данной работе проводится обобщение этого класса систем путем расширения его до обобщенных фреймов. Доказывается, что ортоподобные системы, введенные Т. П. Лукашенко, являются жесткими обобщенными фреймами. Доказываются две теоремы:

Теорема 1. *Обобщенная система Рисса является обобщенным фреймом.*

Теорема 2. *Для того чтобы система* $\Phi = \{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *была обобщенным фреймом в* H *с константами* A *и* B, *необходимо и достаточно, чтобы нашлось гильбертово пространство* $H' \supset H$, *и в нем обобщенная система Рисса с константами* A *и* B, *которая в проекции на* H *будет давать систему* Φ.

Дополнительно приводится два примера разложения функций по обобщенным фреймовым системам и примеры возможного применения таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* – Ижевск: РХД, 2001.

2. Чуи Ч. *Введение в вейвлеты.* – М.: Прикл. математика, 2001.

3. Блаттер К. *Вэйвлет-анализ. Основы теории.* – Техносфера, 2004.

4. Лукашенко Т. П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным* // Матем. сборник. – 1997. – Т. 32. – № 5. – С. 57–72.

5. Захарова А. А. *Интегральные системы Рисса и их свойства* // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2004. – № 6. – С. 28–33.